Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 11 – Tutor

Exercício 1: Calcule $\iint\limits_S (z - x^2 + xy^2 - 1)\, dS$, onde S é a superfície

$$\varphi(u,v) = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (u^2+1)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

com $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 2$.

Solução: Temos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2u,\ 0,\ 1)$$

portanto $\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{1+4u^2}\,.$

Também:

$$dS = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| dudv = \sqrt{1+4u^2}\, dudv\,.$$

Então,

$$\iint\limits_S \big(z - x^2 + xy^2 - 1\big)\, dS = \iint\limits_D \big(u^2 + 1 - u^2 + uv^2 - 1\big)\sqrt{1+4u^2}\, dudv =$$

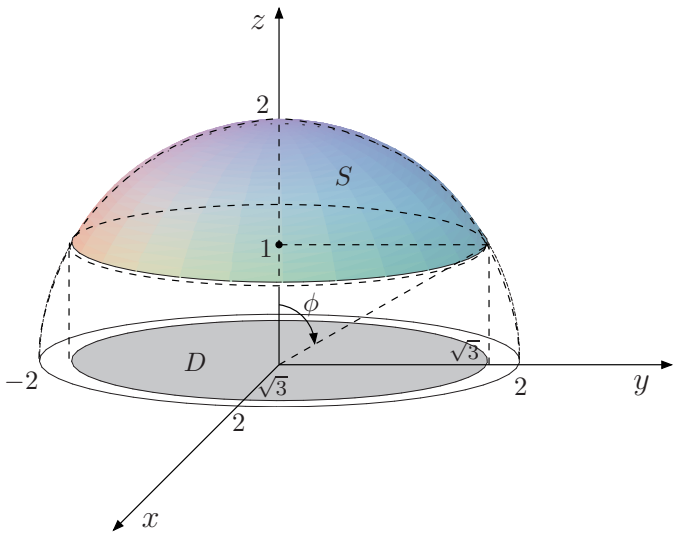
$$= \iint\limits_D uv^2\sqrt{1+4u^2}\, dudv = \int_0^1 \int_0^2 u\big(1+4u^2\big)^{1/2} v^2\, dvdu =$$

$$= \int_0^1 u(1+4u^2)^{1/2} \left[\frac{v^3}{3}\right]_0^2 du = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{8}\int_0^1 \big(1+4u^2\big)^{1/2}\, d\big(1+4u^2\big) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\Big[\big(1+4u^2\big)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{9}\left(5\sqrt{5}-1\right)\,.$$

Exercício 2: Calcule $\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS$, onde $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ e $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 1$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Observe que $\operatorname{tg}\phi = \sqrt{3}/1$ implica $\phi = \pi/3$. Uma parametrização de S é dada por $\varphi(\phi,\theta) = (2\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, 2\cos\phi)$ com $(\phi,\theta) \in D : 0 \le \phi \le \pi/3$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. Já vimos que, no caso da esfera, $x^2+y^2+z^2 = a^2$ e $dS = a^2\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta$. Logo, $dS = 4\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta$. Assim:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f\left(\varphi(\phi,\theta)\right) 4\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta =$$

$$= 4\iint_D \left(4\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta =$$

$$= 16\iint_D \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta = 16\int_0^{\pi/3}(1-\cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi\int_0^{2\pi} d\theta d\phi =$$

$$= -32\pi\int_0^{\pi/3}(1-\cos^2\phi)\; d(\cos\phi) = -32\pi\left[\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/3} =$$

$$= -32\pi\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right) - \left(1-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{20\pi}{3}\,.$$

Exercício 3: Calcule $\iint_S x^2 z\, dS$, onde S é o cilindro $x^2+y^2=a^2$, com $0 \le z \le 1$.

Solução: Podemos parametrizar o cilindro usando as coordenadas cilíndricas com $r = a$. Então $S : \varphi(\theta,z) = (a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta, z)$, com $(\theta,z) \in D : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$. Calculemos $\varphi_\theta \times \varphi_z(\theta,z)$ e seu módulo. Temos

$$\varphi_\theta = (-a\operatorname{sen}\theta, a\cos\theta, 0)$$

$$\varphi_z = (0,0,1)$$

portanto

$$\varphi_\theta \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ -a\,\mathrm{sen}\,\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\,.$$

Observe que o vetor normal em cada ponto do cilindro é paralelo ao plano xy e é a projeção normal de $\varphi(\theta, z)$.

Tem-se:

$$\|\varphi_\theta \times \varphi_z\| = a\,.$$

Logo,

$$dS = \|\varphi_\theta \times \varphi_z\|\; d\theta dz = a d\theta dz\,.$$

Então,

$$\iint_S x^2 z\, dS = \iint_D (a\cos\theta)^2 z \cdot a\; d\theta dz =$$

$$= a^3 \iint_D z\cos^2\theta\; d\theta dz = a^3 \int_0^1 z \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\; d\theta dz =$$

$$= a^3 \cdot \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \int_0^1 z\; dz = \pi a^3 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi a^3}{2}\,.$$

Obs.: Uma outra maneira de parametrizar S é:

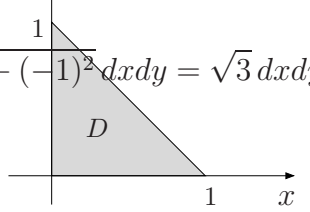
Se $(x, y, z) \in S$ então x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = a^2$ e z é tal que $0 \le z \le 1$. Parametrizando a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, tem-se $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$, com $0 \le t \le 2\pi$. Adotando t e z como parâmetros, tem-se $S : \varphi(t, z) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, z)$, com $(t, z) \in D : \begin{cases} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$.

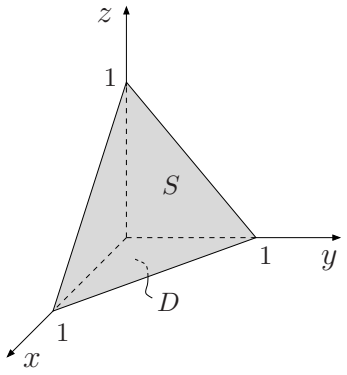
Exercício 4: Calcule $\iint_S x\, dS$, onde S é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Solução: A superfície S e a sua projeção sobre o plano xy estão ilustradas nas figuras que se seguem.

Definimos S por $S : z = 1 - x - y = f(x, y)$, onde $(x, y) \in D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{cases}$. Temos que:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dxdy = \sqrt{3}\, dxdy\,.$$





Então,

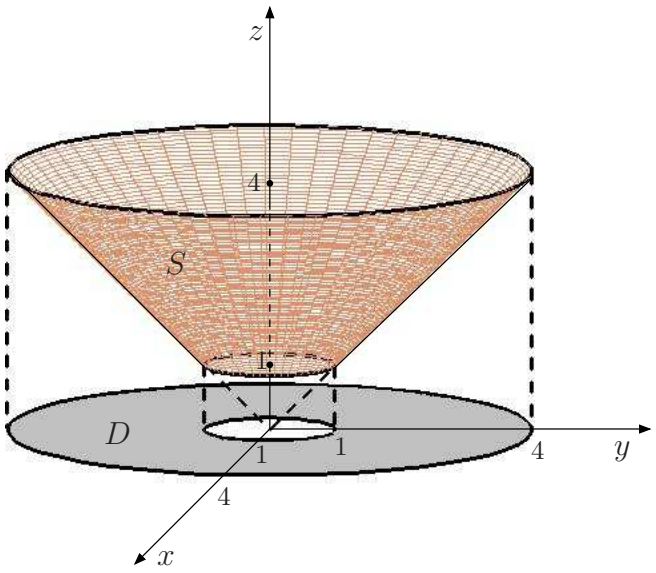
$$\iint_S x\,dS = \iint_D x\sqrt{3}\,dxdy = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x\,dydx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 \left(x-x^2\right)dx = \sqrt{3}\Big[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}\,.$$

Exercício 5: Seja S a porção do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ limitado pelos planos $z=1$ e $z=4$.

a) Parametrize S usando as coordenadas cartesianas.
b) Parametrize S usando as coordenadas polares.
c) Calcule $\iint_S z^2\ dS$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



a) Como S é o gráfico da função $z=\sqrt{x^2+y^2}$, com $(x,y)\in D: 1\le x^2+y^2\le 16$, então, adotando x e y como parâmetros, temos $S:\varphi(x,y)=\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)$, com $(x,y)\in D: 1\le x^2+y^2\le 16$.

b) Adotando r e θ como parâmetros, temos

$$S : \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)$$

onde $(r, \theta) \in D_{r\theta} : 1 \leq r \leq 4\,, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

c) Consideremos a parametrização do item (a) para calcular a integral. Temos, então,

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\; dxdy$$

onde $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Então,

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\; dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\; dxdy = \sqrt{1+1}\; dxdy = \sqrt{2}\; dxdy\,.$$

Assim:

$$\iint\limits_S z^2\; dS = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}\; dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\; dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy &= rdrd\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases}.$$

Transformando o conjunto D em coordenadas polares, temos $D_{r\theta} : 1 \leq r \leq 4\,, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo,

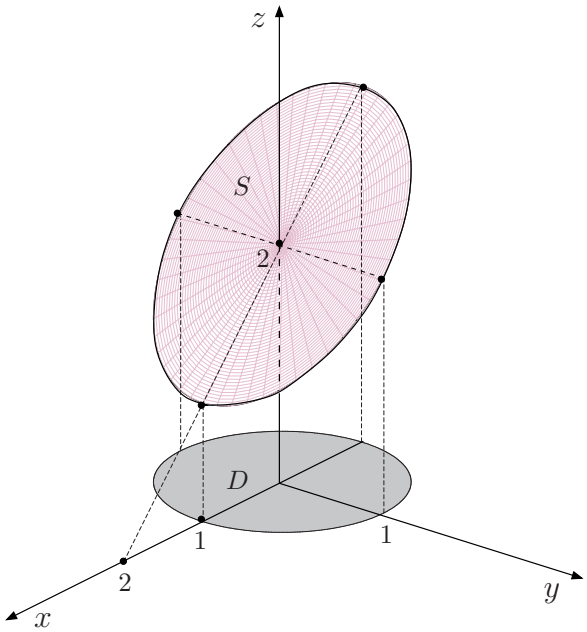
$$\iint\limits_S z^2\; dS = \sqrt{2}\iint\limits_{D_{r\theta}} r^2 r\; drd\theta = \sqrt{2}\int_1^4 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\int_1^4 r^3\; dr = 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^4 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\left(256-1\right) = \frac{255\sqrt{2}\pi}{2}\,.$$

Exercício 6: Calcule a massa da superfície S parte do plano $z = 2-x$ dentro do cilindro $x^2+y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = y^2$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



A superfície S é descrita por $S : z = f(x,y) = 2 - x$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Como $dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy$, então

$$dS = \sqrt{1 + (-1)^2 + 0^2}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy\,.$$

Temos

$$M = \iint\limits_S \delta(x,y,z)\, dS = \iint\limits_S y^2\, dS = \iint\limits_D y^2\sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_D y^2\, dxdy\,.$$

Usando coordenadas polares, temos:

$$\iint\limits_D y^2\, dxdy = \iint\limits_{D_{r\theta}} (r^2 \operatorname{sen}^2\theta) r\, drd\theta = \iint\limits_{D_{r\theta}} r^3 \operatorname{sen}^2\theta\, drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \int_0^1 r^3\, drd\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta =$$

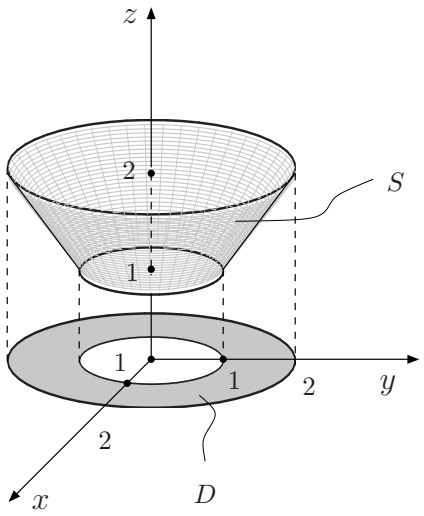
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Logo,

$$M = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4} u.m.$$

Exercício 7: Determine o momento de inércia em relação ao eixo da superfície S parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, sendo a densidade constante.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Note que o eixo de S é o eixo z. Então

$$I_z = \iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\ dS$$

onde $\rho(x,y,z) = \rho$. Logo,

$$I_z = \rho \iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\ dS\,.$$

A superfície S pode ser descrita por $S : z = \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y)$, com $(x,y) \in D : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4$. Tem-se:

$$z_x = f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z_y = f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

portanto

$$1 + (z_x)^2 + (z_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 2\,.$$

Como $dS = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\ dxdy$ então $dS = \sqrt{2}\ dxdy$. Tem-se:

$$I_z = \rho \iint\limits_S (x^2+y^2)\ dS = \rho \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}\ dxdy = \sqrt{2}\rho \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\ dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy & = & rdrd\theta \\ x^2+y^2 & = & r^2 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad D_{r\theta} : \left\{\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq 2\,. \end{array}\right.$$

Então,

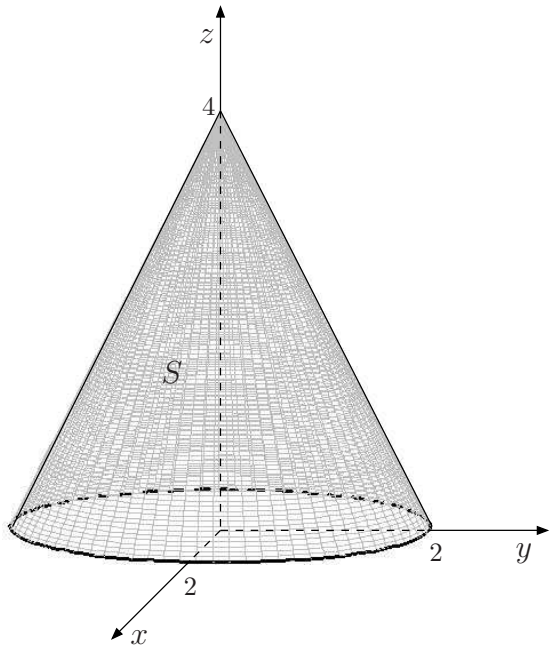
$$I_z = \sqrt{2}\,\rho \iint\limits_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r\; dr d\theta = \sqrt{2}\,\rho \iint\limits_{D_{r\theta}} r^3\; dr d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\,\rho \int_1^2 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\sqrt{2}\,\rho\pi \int_1^2 r^3\; dr =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\rho \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_1^2 = \frac{\sqrt{2}\,\rho\pi}{2}(16-1) = \frac{15\sqrt{2}\,\rho\pi}{2}\,.$$

Exercício 8: Uma lâmina superficial S tem a forma de um cone dado por $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$ e limitado pelo plano xy. Em cada ponto de S a densidade é proporcional à distância entre o ponto e o eixo z. Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo z é igual a $\frac{12}{5}M$, onde M é a massa de S.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Uma parametrização de S é dada por $S : \varphi(x,y) = \Big(x, y, 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}\Big)$, com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 4$. Temos $z_x = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $z_y = \frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Logo,

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\; dxdy = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^2}{x^2+y^2}}\; dxdy = \sqrt{1+4}\; dxdy = \sqrt{5}\; dxdy\,.$$

Como a distância de (x,y,z) ao eixo z é igual a $\sqrt{x^2+y^2}$ então a densidade $\delta(x,y,z)$ é dada por $\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$ onde k é uma constante positiva. A massa M de S é dada por:

$$M = \iint\limits_S \delta(x,y,z)\ dS = k \iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\ dS =$$

$$= k \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{5}\ dxdy = \sqrt{5}k \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy =$$

$$= \sqrt{5}k \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \cdot r\ d\theta dr = 2\sqrt{5}k\pi \int_0^2 r^2\ dr =$$

$$= 2\sqrt{5}k\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}\ \ u.m.$$

O momento de inércia em relação ao eixo z é dado por:

$$I_z = \iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\ dS = k \iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\ dS =$$

$$= \sqrt{5}k \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^{3/2}\ dxdy = \sqrt{5}k \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(r^2\right)^{3/2} r\ d\theta dr =$$

$$= 2\sqrt{5}k\pi \int_0^2 r^4\ dr = 2\sqrt{5}k\pi \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64\sqrt{5}k\pi}{5} =$$

$$= \frac{12}{5} \cdot \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3} = \frac{12}{5}M\ .$$